**Метод сеток**

**Что делаем**

Мы на отрезке, назовем его [a,b] рассматриваем граничную задачу для диф уравнения с граничными условиями, в довесок, мы считаем, что граничная задача имеет единственное решение и это решение непрерывно на нашем отрезке [a,b] и производные до 4 порядка включительно также непрерывны.

*(Слишком сгущать сетку тоже опасно из-за вычислительной неустойчивости разностной аппроксимации производных)*

**Суть метода:**

1. У нас есть область задания диф уравнения, в данном случае отрезок [a,b], который заменяется сеточной областью. Что в свою очередь означает, что на отрезке [a,b] выбирается некоторая система точек, а сеткой, как раз называется совокупность этих выбранных точек.   
 2. Граничная задача, принадлежащая сетке на множестве узлов заменяется сеточной задачей. Тут имеется ввиду соотношения между приближёнными значениями решения граничной задач в узлах сетки. В наших задачах это система линейных алгебраических уравнений. *В итоге получается трехдиагональная матрица.*

3. Сеточную задачу, которую мы получили на предыдущем этапе мы решаем по удобному нам численному методу и благодаря этому находим приближённые значения решения граничной задачи в узлах сетки. Что собственно и является целью сеточного метода.

**Методы замены обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий системой алгебраических уравнений:**

1. Левосторонняя аппроксимация первой производной
2. Правосторонняя аппроксимация первой производной
3. Симметричная аппроксимация первой производной
4. Симметричная аппроксимация второй производной
5. Левосторонняя аппроксимация первой производной по трем узлам
6. Правосторонняя аппроксимация первой производной по трем узлам

**Какой порядок аппроксимации в этой разностной схеме?** (2)

Так как нам нужно заменить разностными отношениями, имеющими второй порядок погрешности относительно 2 и 1 производные.

**По какому количеству точек строится эта аппроксимация второго порядка?**

По 3-м точкам: (x\_k, x\_k+1, x\_k-1), которые привлекаются для аппроксимации уравнения во внутренние узловые точки.

**Требование гладкости к решению диф задачи, чтоб можно было эти разностные отношения применить ?**

По мимо, классических требований гладкости, а это существование 2 производной и граничные условия первого рода.

*(Граничные условия первого рода, т.е. на концах заданные значения самой функции т.е. она непрерывна на отрезке. Тоже для классического решения ОДУ)*

Мы строим разностную схему предположительно большей гладкости. В применяемых формулах погрешности стоят производные 4 порядка, следовательно раз мы их используем, то эти производные должны существовать. Если кратко, метод применим, когда классическое решение рассматриваемой дифференциальной задачи имеет четвертые *ограниченные* производные.

**На чем будем тестировать, первый метол желательно, чтоб вообще не имел погрешностей? Почему именно х^2, а не х^3? В разностной аппроксимации для первой производной, что там в погрешности, помимо h2 ?**

Сейчас объясню: Мы выбираем симметричную аппроксимацию 1-ой производной и у неё в погрешности находится 3-я производная. Следовательно суммарная погрешность аппроксимации на решении всей этой разностной схемы у нас будет 2-го порядка, однако, в общей погрешности уравнения присутствует как 4 так 3 производные, поэтому в качестве тестового примера мы берем функцию на которой эта погрешность аппроксимации будет сначала нулевой, т.е. функцию у которой уже 3-я производная должна быть нулевой, поэтому взят х^2

**Я так понимаю, это уже 5 задача**

**Давай теперь поговорим о граничных условиях 2-го рода?**

**Ответ Светы:**

**Второй род это значит заданы условия первой производной, здесь у нас есть формулы 2-х точечной аппроксимации и трехточечной, в 2-х точечной проблема в том, что при переходе граничных условий в сеточную задачу у нас идёт погрешность 1 рода, а у самого уравнения 2 рода, поэтому у всего метода будет 1. А когда мы берем 3-х точечную аппроксимацию они дают нам граничные условия 2-го порядка, поэтому весь метод будет 2-го порядка. Грубо говоря, 3-х точечных формулы лучше аппроксимируют, чем 2-х точечные. (принято)**

**Альтернативный ответ:**

Тоже самое диф уравнение только на границе заданное значением первой производной и эту первую производную мы сначала аппроксимируем грубо, двух точечными разностными отношениями, которые имеют первый порядок погрешности, при этом в погрешности этой 2-х точечной аппроксимации стоят 2-ые производные, т.е. даже на функции х^2 погрешность будет 1 порядка. На тестах можно увидеть, что действительно 2-ух точечная аппроксимация даёт грубый результат. В отличии от 3-х точечной аппроксимации, которая даёт нам граничные условия 2-го порядка, поэтому весь метод будет 2-го порядка. Грубо говоря, 3-х точечных формулы лучше аппроксимируют, чем 2-х точечные.

*(Займемся 3-х точечной аппроксимацией 1-ых производных на концах с небольшим лечением матрицы, поскольку матрица в первых и последних строках имеет лишние ненулевые элементы. В 3-х точечных аппроксимациях на х2 не должно быть погрешностей, так как наименьший порядок производной уже 3.)*

*(****Надо использовать 3-х точечную аппроксимацию первых производных в концевых точках, благо известны формулы односторонней 3-х точечной аппроксимации****, правда у них погрешность чуть-чуть похуже, чем у симметричной 3-х точечной аппроксимации, что вполне естественно, поскольку в симметричной аппроксимации мы берем сконцентрированную вокруг точки х\_к информацию об исходной функции шаг влево, шаг вправо, а когда одностороння аппроксимация, нам приходится отступать от этой точки на 2 шага, и естественно качество информации ухудшается. Это я к тому, что в остаточном члене, если воспользоваться формулой Тейлора и расписать, хотя бы до 3-1 производной у(х) + h и у(х) + 2h, то там коэффициент будет 2\3, в то время, как у симметричной аппроксимации 1\6 , в 4 раза хуже, тем не менее асимптотически сохраняется второй порядок аппроксимации всей разностной схемы, но при этом возникают кое-какие проблемы. )*

**Поговорим про 3-х точечную**

**Как лечим теперь матрицу? Она недовольна, что ей подсунули 1 и последние строки с 3-мя ненулевыми элементами.**

**Займемся 3-х точечной аппроксимацией 1-ых производных на концах с небольшим лечением матрицы, поскольку матрица в первых и последних строках имеет лишние ненулевые элементы. В 3-х точечных аппроксимациях на х2 не должно быть погрешностей, так как наименьший порядок производной уже 3.**

Да у нас вверху не помещается 2 коэффициента, вверху это «а» коэффициент, внизу «с» коэффициент из-за этого возникает необходимость избавиться от «а и с», что бы это сделать, мы заменяем линейную комбинацию, нам нужно избавиться в первой строке от у\_2, а в последней от у\_н-2, это (ф(х) = н-2).

*Далее нужно составить линейные комбинации, по формулам, в этих крайних строках коэффициент от которого мы хотим избавиться, ну если ещё и умножить вот эти вот разностные аппроксимации в граничных условиях на 2h, чтоб знаменателя не было, так это коэффициент у нас единички или минус единички, так что легко линейную комбинацию составить.*

***(у нас в первой и последних строках должно быть два ненулевых элемента, но у нас их три, и чтобы избавиться от третьего мы делаем для первой строки соответственно линейную комбинацию 1й и 2й строк, а для последней и предпоследней строк, эта линейная комбинация обнуляет третий элемент и в первую и последнюю строки соответственно записываются эти линейные комбинации)***

**Далее идёт неотсортированная доп инфа, всё что я вообще нарыл**

Вкратце об условиях которые мы забиваем.

Концы отрезка нам говорил Гайденко: (0: 1) для х2 и (0:пи) для синуса

(p и q) мы задаем сами неважно какие, главное, чтоб q была отрицательной

Альфа, бетта, гамма – коэффициенты общего вида граничных условий (для граничных условий первого рода у нас заданы значения самих функций в конце отрезка), если это х2, то для него будет 1 0 0 1 0 1

Если это синус, то альфа = 1 и там и там, бетта 0 0 , гамма =   
1 0 0 1 0 0  
  
Для 2 сеток граничные условия 2 рода и в 2-х точечной и в трех точечной аппроксимации, там уже мы задаем не значения самих функций, а значения производной в конце отрезка, для х2 первая производная 2х, значит у меня 0 1 0 т 0 1 2, для синуса : 0 1 1 и 0 1 -1 , так как мы смотрим не на синус, а на косинус

В проге

X - это узлы  
y – приближенные решения  
x^2 – сама функция  
pog = х^2 - у

**Оценка погрешности и сходимость метода сеток**

Реально из-за наличия погрешностей округления сеточные значения будут вычисляться как решение системы линейных алгебраических уравнений

Метод сеток, определяемый формулой (14), называется равномерно

сходящимся, если при h -> 0 выполняется условие: e(h) -> 0

**Совсем дикая инфа, нудо бы удалить**Задача 4.

Метод сеток для обыкновенного диф уравнения.

В четвёртой задаче граничное условие первого рода и решается задач ОДУ. Рассматривается граничная задача для дифференциального уравнения. У нас есть диффур, есть граничные условия. Данный метод переводит всю задачу в сеточную задачу след образом  
- первое, он разбивает саму область на сеточную, т.е. наш отрезок  
- второе, он переводит само уравнения и граничные условия в систему линейных уравнений и граничные условия тоже добавляются , как два уравнения в эту систему, получается трехдиагональня матрица, эту матрицу мы решаем как-либо численным методом.

Самый главный вопрос – вопрос погрешности, мы используем тут 2-ух точечные формулы, из-за этого у нас само уравнение идёт второго порядка, а у граничных условий первого порядка из-за этого весь метод становится первого порядка (перескок на вторую краевую задачу)

Формулы для перехода от диффура к сеточной задаче: лево, право стороння аппроксимация для граничных условий и симметричная аппроксимация для самих уравнений.

У нас уравнение второго порядка приходится заменять разностными отношениями 2 и 1 производную, т.е. обе заменяем приближённо-разностными отношениями имеющими второй порядок погрешности относительно шага.